TNA001

Förslag till övningsuppgifter

FN = Forsling/Neymark, K = Kompendiet – Vektorer, linjer och plan, ÖT = Övningstentamen

1. Vektorer, linjer och plan

ÖT:4, 6, K3.2, K3.3 och Uppgifterna 1, 2 och 3 nedan.

Uppgift 1.

Linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in R$, och punkten $P = (2, -1, 1)$ är givna i en ON-bas.

a) Beräkna avståndet mellan linjen och punkten *P*.

b) Bestäm koordinaterna för P:s spegling, *S*, i linjen.

Uppgift 2.

a) Beräkna avståndet mellan punkten $P = (3, 0, -1)$ och skärningslinjen mellan planen $x + y - z = 1$ och $x + 2y = 1$.

b) Bestäm koordinaterna för *P*:s ortogonala projektion, *Q*, på skärningslinjen (från a)-uppgiften).

Uppgift 3.

a) Beräkna avståndet mellan punkten (1,2,0) och planet $x - y + 2z = 0$.

b) Bestäm spegelbilden av punkten (1,2,0) i planet $x - y + 2z = 1$.

2. Inverser

FN: 2.67, 2.68 och Uppgifterna 4 och 5 nedan

Uppgift 4.

a) En funktion som är omvändbar har som bekant invers. Förklara vad som menas med att en funktion är omvändbar. Rita gärna kompletterande figur/figurer.

b) Visa att funktionen $g(x) = x^2 - 2x - 3$, $1 \le x \le 4$ har en invers g^{-1}. Bestäm även inversen och dess definitionsmängd $D_{g^{-1}}$.

Uppgift 5.

Betrakta funktionen $f(x) = \sqrt{1 - \ln(2x-1)}$.

a) För vilka $x \in \mathbf{R}$ är $f(x)$ definierad?

b) Bestäm, om möjligt, inversen till f.

3. Olikheter

FN: 1.105abc

4. Absolutbelopp

ÖT:1ab

5. ln och exp

ÖT:5 och FN: 2.70

6. Trigonometri (inklusive arcusfunktionerna)
ÖT:1c, ÖT:3, ÖT7 (svår) och Uppgifterna 6 och 7 nedan

Uppgift 6.

a) Visa att $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$

b) Bestäm det exakta värdet av $\sin(u+v)$ om $\sin u = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ och

$\sin v = -\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$.

Uppgift 7.
Lös ekvationerna

a) $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, $x \in [0, 2\pi]$.

b) $\cos x - 4\sin(2x) \cdot \sin x + 2\cos(2x) \cdot \cos x = 0$, $x \in \left]-\pi, \pi\right]$

c) $\arcsin x = \arccos(3x)$

7. Komplexa tal
ÖT:2 och FN: 2.63a, 2.64, 2.81a och Uppgift 8 nedan

Uppgift 8

a) Åskådliggör i det komplexa talplanet de punkter för vilka det gäller att $\operatorname{Re} z \geq 0$ och $|z| \leq 2$.

b) Visa att $\operatorname{Re} z = 0$ om $z = \frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi}$, $a, b \in \mathbf{R}$.

8. Geometrisk, aritmetisk summa, binomialsatsen
FN: 1.116a och Uppgift 9 nedan

Uppgift 9

Ange, **med motivering**, för vart och ett av följande tre påståenden (A, B och C) om det är sant eller falskt.

A. Koefficienten för x^5 är -7 i utvecklingen av $\left(x - \frac{1}{2}\right)^8$.

B. I den aritmetiska talföljd, som börjar enligt $-5,\ 3,\ 11,\ 19,\ \ldots$, är det 215:e elementet lika med 1707.

C. Det gäller att $\sum_{k=1}^{15}\left(3 \cdot 2^{k-1}\right) = 2^{15} - 1$

9. Induktionsbevis
Uppgift 10 nedan

Uppgift 10

Visa att formeln $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ gäller för alla $n \in Z^+$.

Facit

1. **a)** $\frac{1}{6}\sqrt{210}$ **b)** $\boldsymbol{S} = \left(-\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2. **a)** $\frac{1}{2}\sqrt{14}$ **b)** $Q = \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3. **a)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **b)** $S = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

4. **a)** **b)** $g^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+4}$, $D_{g^{-1}} = [-4,5]$

5. **a)** $D_f = \left]\frac{1}{2}, \frac{e+1}{2}\right]$

b) $f^{-1}(y) = \dfrac{e^{1-y^2}+1}{2}$ (eller $f^{-1}(x) = \dfrac{e^{1-x^2}+1}{2}$) med $D_{f^{-1}} = [0,\infty[$.

6. **b)** $\dfrac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$

7. **a)** $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$, $x_3 = \dfrac{7\pi}{12}$ och $x_4 = \dfrac{19\pi}{12}$

b) Lösning

$\cos x - 4\sin(2x)\sin x + 2\cos(2x)\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\cos x - 8\sin^2 x\cos x + 2(1-2\sin^2 x)\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$$\cos x\left(-12\sin^2 x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \quad \text{eller} \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$\cos x = 0$ ger oss $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ eller $x = -\frac{\pi}{2} + n2\pi$ och

$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$ eller $\sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ eller $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + n2\pi$$

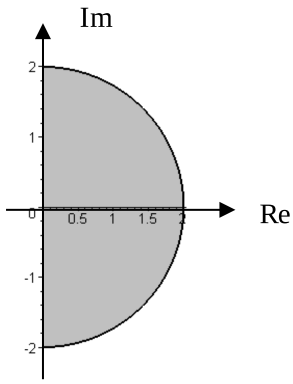
$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$

Prövning med olika heltalsvärden på n ger att $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{5\pi}{6}$ ligger i intervallet $[-\pi, \pi]$.

Svar: $x = \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{\pi}{6}, \pm\dfrac{5\pi}{6}$

c) $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

8. **a)**



8b) Lösning

$$z=\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}=\frac{(a+bi)^2-(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a^2+2abi+(bi)^2-a^2+2abi-(bi)^2}{a^2-(bi)^2}=$$

$$=\frac{4abi}{a^2+b^2}=\underbrace{0}_{\operatorname{Re}z}+\underbrace{\frac{4ab}{a^2+b^2}}_{\operatorname{Im}z}i$$

d.v.s. $\operatorname{Re}z=0$, v.s.v.

9. **Lösning:**

A: SANT ty $\left(x-\frac{1}{2}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{8-k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$, d.v.s. x^5 -termen erhålls för $k=3$, vilket innebär att koefficienten för x^5 blir $\binom{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\ldots=\ldots=-7$.

B: SANT ty för en aritmetisk talföljd gäller att n:te elementet $a_n=a_1+(n-1)d$, där a_1 är det första elementet och d är differensen, vilket innebär att i vår talföljd har vi $a_{215}=-5+(215-1)\cdot 8=1707$.

C: FALSKT ty $\sum_{k=1}^{15}\left(3\cdot 2^{k-1}\right)=\frac{3\left(2^{15}-1\right)}{2-1}=3\left(2^{15}-1\right)\neq 2^{15}-1$

Svar: A och B är sanna, C är falskt.

10. Lösning

Vi skall visa att påståendet $P(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ gäller för alla $n \in Z^+$.

Bevismetod: Induktion

Steg I

$V(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ $\quad\quad$ $H(1) = 2 - \frac{1+2}{2^1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Alltså har vi $V(1) = H(1)$, d.v.s. $P(1)$ gäller.

Steg II

Antag att $P(p)$ gäller för ett godtyckligt $p \in Z^+$, d.v.s. antag att $\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{p+2}{2^p}$

Vi får

$$V(p+1) = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^k} + \frac{p+1}{2^{p+1}} \underset{\text{Enligt antagandet}}{\overset{*}{=}} 2 - \frac{p+2}{2^p} + \frac{p+1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{2(p+2)}{2^{p+1}} + \frac{p+1}{2^{p+1}} =$$

$$= 2 - \frac{2p+4-p-1}{2^{p+1}} = 2 - \frac{p+3}{2^{p+1}} = 2 - \frac{(p+1)+2}{2^{p+1}} = H(p+1)$$

Alltså: $V(p) = H(p) \Rightarrow V(p+1) = H(p+1)$ d.v.s. om $P(p)$ gäller så gäller även $P(p+1)$.

Steg III

Påståendet gäller enligt I för $n = 1$. Enligt II gäller det då även för $n = 1+1 = 2$. Då gäller det även för $n = 2+1 = 3$ o.s.v. Via matematisk induktion gäller påståendet för alla $n \in Z^+$, v.s.v.